

الدرس 12

الجداء السلمي في الفضاء

1. الجداء السلمي في المستوي (تذكير)

تعريف

\vec{U} و \vec{V} شعاعان من المستوي.

- إذا كان أحد الشعاعين معدوم فإن الجداء السلمي معدوم أي $\vec{U} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{V} = 0$
- إذا كان الشعاعان غير معدومين فإن الجداء السلمي لـ \vec{U} و \vec{V} هو العدد الحقيقي

حيث $\vec{U} \cdot \vec{V} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$ \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} ممثلان على التوالي لـ \vec{U} و \vec{V}

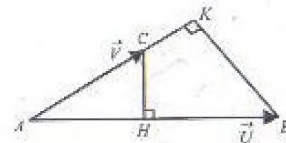
خواص

- (1) - إذا كانت H المسقط العمودي للنقطة C على (AB) و K المسقط العمودي لـ B على (AC)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$$

- إذا كان $C'D'$ المسقط العمودي لـ CD على (AB)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$



(2) إذا كان \vec{U} و \vec{V} شعاعين مرتبطين خطيا وفي نفس الاتجاه فإن $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\|$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \text{ أي}$$

- إذا كان \vec{U} و \vec{V} مرتبطين خطيا ومختلفين في الاتجاه فإن :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = -\|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| = -AB \times AC$$

(3) $\vec{U} \cdot \vec{U} = \vec{U}^2 = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$ يسمى \vec{U} المربع السلمي لـ \vec{U} .

(4) $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ ثلاث أشعة من المستوي و k عدد حقيقي لدينا :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$$

$$\vec{U} \cdot (k\vec{V}) = (k\vec{U}) \cdot \vec{V} = k(\vec{U} \cdot \vec{V})$$

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$$

$$(\vec{U} + \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + 2(\vec{U} \cdot \vec{V}) + \vec{V}^2$$

$$(\vec{U} + \vec{V})(\vec{U} - \vec{V}) = \vec{U}^2 - \vec{V}^2$$

$$(\vec{U} - \vec{V})^2 = \vec{U}^2 - 2(\vec{U} \cdot \vec{V}) + \vec{V}^2$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2} [\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 - \|\vec{U}\|^2 - \|\vec{V}\|^2] \quad (5)$$

(6) \vec{U} و \vec{V} متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$

(7) - في معلم متعامد ومتجانس إذا كان \vec{U} و \vec{V} إحداثياتهما على التوالي (x, y) و (x', y')

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ و } \vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy'$$

- إذا كانت A و B نقطتين من المستوي إحداثياتهما على التوالي (x_A, y_A) و (x_B, y_B)

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ فإن}$$

نتائج

- في المتوازي الأضلاع $ABCD$ لدينا :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} [AD^2 - AB^2 - AC^2]$$

- في المثلث ABC لدينا $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2]$

- إذا كانت A و B نقطتان من المستوي و I منتصف $[AB]$ فإن :

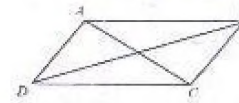
من أجل كل نقطة M من المستوي يكون $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ (نظرية التوسط).

- إذا كان ABC مثلثا كفيّا و a, b, c أطوال أضلاعه $[AB], [AC], [BC]$ فإن:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \quad (\text{نظرية الكاشي})$$

- في التوازي الأضلاع $ABCD$ لدينا:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 \quad (\text{نظرية (فان نيومان)}).$$



تمرين تدريبي 1

$ABCD$ مستطيل بحيث $AD=3, AB=5$

لتكن D', B' مسقطي D و B على المستقيم (AC)

1- احسب $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$

ب) استنتج قيمة $\cos(\hat{DAC})$ ، ثم القيمة القربة لـ \hat{DAC} .

2- احسب $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}$

ب) استنتج الطول $D'B'$

الحل:

$$(1) \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD^2 = 9 \quad \text{لأن } D \text{ هي مسقط } C \text{ على } (AD)$$

$$(2) \quad \text{لدينا } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD \times AC \cos(\hat{DAC}) \quad \text{ومنه } \cos(\hat{DAC}) = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}}{AD \times AC}$$

$$\cos(\hat{DAC}) = \frac{9}{3 \times \sqrt{34}} = 0,51$$

القيمة القربة لـ \hat{DAC} هي $59,04$ درجة.

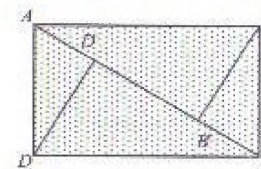
$$(1) \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{D'B'} = -CA \times D'B' \dots\dots (1)$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + (-\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AD^2 - AB^2 = 9 - 25 = -16$$

$$(2) \quad \text{من المساواة (1) نجد } D'B' = \frac{-\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}}{CA} = \frac{16}{\sqrt{34}}$$



تمرين تدريبي 2

ABC مثلث قائم في A ، M منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ و H السقط العمودي لـ A على (BC) ، K و L مسقطي H على التوالي على $[AB]$ و $[AC]$

بين أن المستقيمين (AM) و (KL) متعامدان.

الحل:

لإثبات أن (AM) و (KL) متعامدان نثبت أن $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$

بما أن M منتصف $[BC]$ فإن $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

نحسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL}$ و $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KL}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} \quad (\text{استعملنا الإسقاط العمودي على } (AB))$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$$

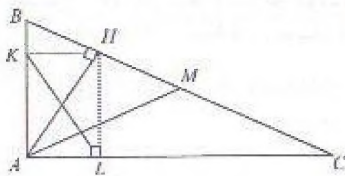
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KL}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

لأن H مسقط A على (BC) .



2. معادلة مستقيم ودائرة في المستوي

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

- إذا كان $\vec{n}(a, b)$ الشعاع الناطم لمستقيم (d) فإن معادلة (d) تكتب على الشكل $ax + by + c = 0$

وبالعكس إذا كان a و b عنددين حقيقيين غير معنومين معا، فإن المعادلة $ax + by + c = 0$

هي معادلة لمستقيم شعاعه الناطم إحداثياته (a, b)

- الدائرة ذات المركز $I(a, b)$ وطول نصف القطر r هي مجموعة النقط $M(x, y)$ بحيث

$$IM = r \quad \text{ومعادلة هذه الدائرة هي } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

- الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

تمرين تدريبي

في معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط $A(2, 3)$ ، $B(3, 5)$ ، $C(0, 4)$

1- بين أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

2- عين معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

3- عين معادلة متوسط القطعة $[BC]$.

✓ الحل :

(1) لدينا $\vec{AB} (1, 2)$ ، $\vec{AC} (-2, 1)$ ، $\vec{BC} (-3, -1)$

نلاحظ أن $AB = AC = \sqrt{5}$ و $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

(2) بما أن الدائرة محيطة بالمثلث القائم والمتساوي الساقين ABC ، فإن قطرها هو $[BC]$ ومركزها هو I منتصف $[BC]$.

إحداثيات I هما $(1.5, 4.5)$ و $BC = \sqrt{10}$

إذن معادلة الدائرة هي $(x - 1.5)^2 + (y - 4.5)^2 = 10$

(4) الشعاع \vec{BC} هو الشعاع النازل لمتوسط القطعة $[BC]$.
لتكن نقطة من متوسط القطعة $[BC]$.

لدينا إذن $\vec{IM} \cdot \vec{BC} = 0$ ومنه ينتج $3x + y - 9 = 0$

3. المسافة بين نقطة ومستقيم في المستوي

تعريف

ليكن (d) مستقيم من المستوي و M نقطة كيفية من المستوي .
نسمي مسافة بين النقطة M والمستقيم (d) . العدد الحقيقي الموجب HM حيث H السقط العمودي للنقطة M على (d) .

خاصية

ليكن (d) مستقيما معادلته $ax + by + c = 0$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس و M_0 نقطة من المستوي إحداثياتها (x_0, y_0) .

المسافة بين M_0 و (d) تساوي $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

تمرين تدريبي

نعتبر في معلم متعامد ومتجانس المستقيم (d) ذا المعادلة $x + 2y + 3 = 0$

ولتكن A نقطة إحداثياتها $(1, 2)$

(1) عيّن المسافة بين A و (d)

(1-2) تحقق أن التقاطعين $B(-1, -1)$ ، $C(-5, 1)$ تنتميان إلى (d) .

ثم عيّن مساحة المثلث ABC

(ب) عيّن المسافة بين B و (AC) ثم أعط قيمة مقربة لها.

✓ الحل :

(1) المسافة بين A و (d) هي $\frac{|1+2 \times 2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$

(2) بما أن $-1+2(-1)+3=0$ فإن النقطة B تنتمي إلى (d) .
وبنفس الطريقة نبين أن النقطة C تنتمي إلى (d) .

مساحة المثلث ABC هي $\frac{BC \times AH}{2}$ حيث $[AH]$ هو الارتفاع المرسوم من A في المثلث ABC

ومن السؤال (1) لدينا $AH = \frac{8}{\sqrt{5}}$ إذن $\frac{BC \times AH}{2} = \frac{5 \times \frac{8}{\sqrt{5}}}{2} = 4\sqrt{5}$

(ب) مساحة المثلث ABC هي $\frac{1}{2} h AC$ حيث h طول العمود المرسوم من B في المثلث ABC

إذن $\frac{1}{2} h AC = 4\sqrt{5}$ ومنه $h = \frac{8\sqrt{5}}{AC} = \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{37}}$

4. الجاء السلمي في الفضاء

مثال -

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات قائم حيث $AB = 2a$ و $BC = BF = a$ مع a عدد حقيقي موجب تماما.

(1) احسب الجاء السلمي \vec{AH} ، \vec{AD} في المستوي (AED) .

(1-2) الأشعة \vec{AD} ، \vec{AE} ، \vec{CF} من نفس المستوي لماذا؟

(ب) احسب الجاء السلمي \vec{AH} ، \vec{DE} في المستوي (AED) مستنتجا \vec{AH} ، \vec{CF} .

(3) احسب الجاء السلمي \vec{AD} ، \vec{DC} في المستوي (ABC) مستنتجا \vec{AD} ، \vec{HG} .

(1-4) المستقيمان (AD) و (GD) متعامدان لماذا؟

(ب) احسب \vec{AD} ، \vec{AG} في المستوي (ADG)

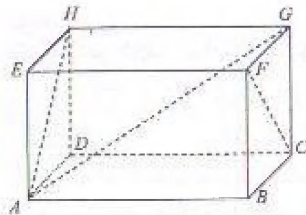
وتحقق باستعمال السؤالين (1) و (3) أن

$$\vec{AD} \cdot \vec{AG} = \vec{AD} \cdot \vec{AH} + \vec{AD} \cdot \vec{HG}$$

✓ الحل :

(1) $\vec{AD} \cdot \vec{AH} = \vec{AD} \cdot \vec{AD} = AD^2 = a^2$

لأن D هي السقط العمودي للنقطة H على (AD)



(2) بما أن $\vec{CF} = \vec{DE} - \vec{AD}$ و $\vec{AE} = \vec{DE} - \vec{AD}$ فإن الأشعة \vec{AD} ، \vec{AE} و \vec{CF} تنتمي إلى نفس المستوى (AED)

(ب) لأن $\vec{AH} \cdot \vec{DE} = 0$ لأن الرباعي AEHD مربع

$$\vec{AH} \cdot \vec{CF} = \vec{AH} \cdot \vec{DE} = 0$$

(3) لأن الرباعي ABDC مستطيل

$$\vec{AD} \cdot \vec{DC} = 0 \quad \vec{AD} \cdot \vec{HG} = \vec{AD} \cdot \vec{DC} = 0$$

(4) بما أن (AD) عمودي على المستوى (GDC) فإنه عمودي على كل مستقيم منه، إذن فهو عمودي على (DG)

$$\vec{AD} \cdot \vec{AG} = \vec{AD} \cdot (\vec{AD} + \vec{DG})$$

$$= \vec{AD} \cdot \vec{AD} + \vec{AD} \cdot \vec{DG} = AD^2 + 0 = a^2$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AH} + \vec{AD} \cdot \vec{HG} = a^2 + 0 = a^2$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AH} + \vec{AD} \cdot \vec{HG} = \vec{AD} \cdot \vec{AG} \quad \text{إذن}$$

1.4 تعريف

ليكن \vec{U} و \vec{V} شعاعين من الفضاء -

- إذا كان \vec{U} و \vec{V} غير معدومين و \vec{AB} ، \vec{AC} ممثليهما على التوالي، فإنه يوجد على الأقل مستوى يشمل النقط A ، B ، C ، E -

نسمي الجداء السلمي للشعاعين \vec{U} و \vec{V} بالجداء السلمي \vec{AB} ، \vec{AC} المحسوب في المستوى (ABC)

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \cdot \cos(\widehat{BAC})$$

- إذا كان أحد الشعاعين معدوماً فإن جداءهما السلمي معدوم أي $\vec{U} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{V} = 0$

خواص

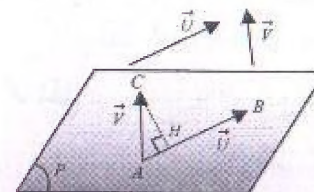
كل خواص الجداء السلمي في المستوى تبقى صحيحة في الفضاء وبالأخص :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AK} \cdot \vec{AC} \quad (1)$$

حيث H السقط العمودي للنقطة C على (AB) و K السقط العمودي للنقطة B على (AC)

$$\vec{U} \cdot (k \vec{V}) = k(\vec{U} \cdot \vec{V}) \quad (2)$$

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W} \quad (3)$$



4.2 العبارة التحليلية للجداء السلمي - المسافة بين نقطتين

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

- إذا كان \vec{U} و \vec{V} شعاعان إحداثيتاهما على التوالي (x, y, z) ، (x', y', z') في العلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy' + zz'$$

وبصفة خاصة $\vec{U} \cdot \vec{U} = x^2 + y^2 + z^2$ و $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- إذا كانت A و B نقطتين من الفضاء إحداثيتاهما على التوالي (x_A, y_A, z_A) ، (x_B, y_B, z_B)

$$\text{فإن } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

تمرين تدريبي 1

ABCD رباعي وجوه منتظم بحيث كل وجه هو مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه (3.5) C

- احسب $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ ، $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ ، $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

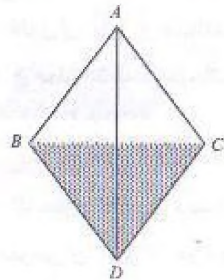
✓ الحل :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = AB \cdot AD \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a^2$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AD}) = \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD}$$

$$= -\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0$$



تمرين تدريبي 2

ABCEFGH مكعب و $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء -

(أ) عين إحداثيات الأشعة \vec{AG} ، \vec{BE} و \vec{ED}

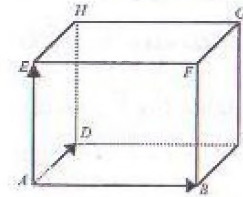
(ب) بين أن المستقيم (AG) يعامد المستوى (BED)

✓ الحل :

$$(1) \quad G(1, 1, 1), F(1, 0, 1), E(0, 0, 1), D(0, 1, 0), C(1, 1, 0), B(1, 0, 0), A(0, 0, 0)$$

$$\vec{ED}(0, 1, -1), \vec{BE}(-1, 0, 1), \vec{AG}(1, 1, 1), H(0, 1, 1)$$

(ب) كل مستقيم يعامد مستقيمين متقاطعين فإنه يعامد المستوي الذي يشملهما.



$$\vec{AG} \cdot \vec{BE} = -1 + 0 + 1 = 0 \text{ ومنه } (AG) \text{ عمودي على } (BE).$$

$$\vec{AG} \cdot \vec{ED} = 0 + 1 - 1 = 0 \text{ ومنه } (AG) \text{ عمودي على } (ED).$$

بما أن (AG) عمودي على (ED) وعلى (BE) ،
و (ED) و (BE) متقاطعين فإنه عمودي على المستوي
الذي يشمل (ED) و (BE) أي عمودي على (BED) .

5. التعامد في الفضاء

1.5 أشعة متعامدة

في الفضاء، القول أن الشعاعين الغير العدميين \vec{U} و \vec{V} متعامدان يعني أنه إذا كان $\vec{U} = \vec{AB}$

و $\vec{V} = \vec{CD}$ فإن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان.

مبرهنة

$$1- \text{ القول أن } \vec{U} \text{ و } \vec{V} \text{ متعامدان يكافئ القول أن } \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$

$$2- \text{ في معلم متعامد ومتجانس، الشعاعان } \vec{U}(x, y, z) \text{ و } \vec{V}(x', y', z') \text{ متعامدان يكافئ}$$

$$xx' + yy' + zz' = 0.$$

الإنبات

$$1- \text{ إذا كان } \vec{U} \text{ أو } \vec{V} \text{ معدوم فإن } \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$

- نفرض أن \vec{U} و \vec{V} غير معدومين عندئذ توجد نقط مختلفة A, B, C بحيث،

$$\vec{U} = \vec{AB} \text{ و } \vec{V} = \vec{AC}$$

ولتكن D نقطة بحيث $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$
حسب تعريف الجداء السلمي لدينا،

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{AB} + \vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2 \right]$$

$$\|\vec{AD}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 \text{ يكافئ } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\text{يكافئ } AD^2 = AB^2 + AC^2$$

إذن وحسب نظرية فيثاغورس ينتج أن \vec{AB} و \vec{AC} متعامدان

وعليه \vec{U} و \vec{V} متعامدان.

$$2- \text{ لدينا } \vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy' + zz' \text{ ومن (1) نستنتج أن:}$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \text{ يكافئ } xx' + yy' + zz' = 0$$

5.2 الشعاع النازل لمستوي - تعامد مستقيم ومستوي

الشعاع النازل لمستوي

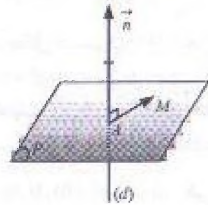
- القول أن الشعاع الغير معدوم \vec{AB} نازل للمستوي (P) يعني أن المستقيم (AB) يعامد المستوي (P)

- الشعاع النازل لمستوي (P) هو شعاع غير معدوم \vec{n} بحيث منحاه يعامد المستوي (P)

تعامد مستقيم ومستوي

- (d) مستقيم شعاع توجيهه \vec{n} و A نقطة منه.

المستوي (P) العمودي على (d) في A هو مجموعة النقط M حيث أن المستقيم (AM) عمودي على المستقيم (d) .



إذن (P) هو مجموعة النقط M حيث أن (AM) يعامد \vec{n} .

وعليه يكون \vec{n} هو الشعاع النازل لـ (P) .

- مجموعة نقط المستوي

- المستوي الذي يمر من النقطة A وشعاعه النازل \vec{n}

هو مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

ملاحظة

\vec{n}_1, \vec{n}_2 شعاعان نازلان لـ (P_1) و (P_2) على الترتيب

- إذا كان \vec{n}_1 و \vec{n}_2 مرتبطين خطيا فإن (P_1) و (P_2) متوازيان أو منطبقان.

- إذا كان \vec{n}_1 و \vec{n}_2 متعامدين فإن (P_1) و (P_2) متعامدان والعكس صحيح.

- إذا كان \vec{n}_1 و \vec{n}_2 مستقلين خطيا فإن (P_1) و (P_2) متقاطعان.

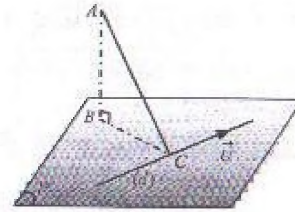
تمرين تدريبي

(d) مستقيم محتوي في (P) و A نقطة خارجة عن (P) و B مسقطها عليه.

و C هي السقط العمودي للنقطة B على (d) .

بين أن المستقيمين (AC) و (d) متعامدان.

✓ الحل :



لنرهن على أن مستقيمين متعامدان يكفي أن نرهن أن الجداء السلمي لشعاعي توجيههما معلوم :

$$\vec{AC} \cdot \vec{U} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{U} \\ = \vec{AB} \cdot \vec{U} + \vec{BC} \cdot \vec{U} = 0 + 0 = 0$$

لأن (AB) عمودي على (P) و \vec{BC} عمودي على \vec{U} .

6. المعادلة الديكارتية لمستوي

1-6 المعادلة الديكارتية لمستوي

مبرهنة

- كل مستوي (P) شعاعه الناظم $\vec{n}(a, b, c)$ له معادلة ديكارتية من الشكل :

$$ax + by + cz + d = 0$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية غير معدومة معا.

- بالعكس مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء حيث $ax + by + cz + d = 0$ مع

$\vec{n}(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ هي مستوي شعاعه الناظم $\vec{n}(a, b, c)$

الإثبات

لتكن $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من المستوي (P) .

- النقطة $M(x, y, z)$ تنتمي إلى (P) يكفي $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

وعليه ينتج $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ بعد النشر والتبسيط

نجد $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ حيث $ax + by + cz + d = 0$

- بما أن a, b, c ليست كلها معدومة معا فيمكننا أن نفرض $a \neq 0$.

نسمي (E) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ بحيث $ax + by + cz + d = 0$

النقطة $A\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$ تنتمي إلى (E) .

وبالتالي فإن معادلة (E) تكتب على الشكل $a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = 0$

أي $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ حيث $\vec{n}(a, b, c)$

إذن (E) هو المستوي المار من النقطة A وشعاعه الناظم هو $\vec{n}(a, b, c)$.

◆ مثال -

في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

نعتبر النقط $A(1, 1, -1)$ ، $B(3, 1, -2)$ ، $C(2, 0, -2)$:

(أ) بين أن النقط A, B, C تحدد مستوي.

(ب) عين شعاعا ناظما للمستوي (ABC) .

(ج) عين معادلة للمستوي (ABC) .

✓ الحل :

(أ) حتى تحدد النقط A, B, C مستويا يجب أن يكون الشعاعان \vec{AB} ، \vec{AC} غير مرتبطين خطيا.

$$\vec{AB}(2, 0, -1) \text{ ، } \vec{AC}(1, -1, -1)$$

الشعاعان \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطان خطيا وبالتالي

فإن النقط A, B, C تحدد مستوي.

(ب) ليكن $\vec{n}(a, b, c)$ شعاع ناظم للمستوي (ABC) فهو إذن عمودي على \vec{AB} وعلى \vec{AC}

$$\text{إذن } \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$2a - c = 0 \text{ يكفي } \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$a - b - c = 0 \text{ يكفي } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\text{ومنه نستنتج } c = 2a \text{ و } b = -a$$

$$\text{إذن } \vec{n}(a, -a, 2a) \text{ أي } \vec{n} = a(1, -1, 2)$$

إذن يوجد عدد غير منته من الأشعة الناظمة، نختار على سبيل المثال الشعاع الموافق للعدد

$$a = 1 \text{ فنجد } \vec{n}(1, -1, 2)$$

(ج) تعيين معادلة المستوي (ABC) :

طريقة-1 :

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة كيفية من (ABC) عندئذ :

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ ومنه ينتج } (x-1) - 1(y-1) + 2(z+1) = 0$$

$$\text{بالتبسيط نجد } x - y + 2z + 2 = 0$$

طريقة-2 :

بما أن $\vec{n}(1, -1, 2)$ ناظم للمستوي (ABC)

فإن معادلة (ABC) هي $x - y + 2z + d = 0$

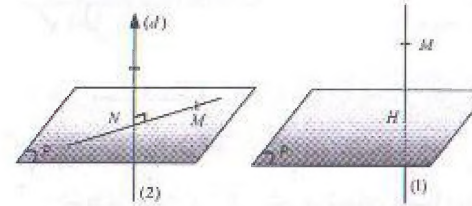
وبما أن $A \in (ABC)$ فإن $1 - 1 - 2 + d = 0$ أي $d = 2$

ومنه تكون معادلة المستوي (ABC) هي $x - y + 2z + 2 = 0$.

2.6 المسافة بين نقطة ومستوي

تعريف

- (1) نقطة من الفضاء و (P) مستوي.
يوجد مستقيم واحد عمودي على (P) يمر بالنقطة M . هذا المستقيم يقطع (P) في نقطة وحيدة H والتي تسمى بالسقط العمودي للنقطة M على (P) .
نسمي المسافة بين M و (P) بالطول MH .
(2) لتكن M نقطة من الفضاء و (d) مستقيم.
يوجد مستوي وحيد يمر بالنقطة M ويعامد (d) ويقطعه في نقطة وحيدة.
هذه النقطة تسمى بالسقط العمودي للنقطة M على (P) .



مبرهنة

- في معلم متعامد ومتجانس المسافة بين النقطة $A(\alpha, \beta, \gamma)$ والمستوي (P) ذو المعادلة:
 $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

مثال -

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.
 $A(1, 2, 3)$ نقطة منه و (P) مستوي معادلته الديكارتية $2x+3y+z-2=0$.
بين أن A لا تنتمي إلى (P) ، ثم احسب المسافة بين A و (P) .

الحل:

بما أن $2 \times 1 + 3 \times 2 + 3 - 2 = 9 \neq 0$ فإن المعادلة غير محقة وبالتالي A لا تنتمي إلى (P) .

$$\text{المسافة بين } A \text{ و } (P) \text{ هي } \frac{|2 \times 1 + 3 \times 2 + 3 - 2|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

3.6 نصف الفضاء

ليكن (P) مستوي معادلته $ax+by+cz+d=0$ مع a, b, c اعداد حقيقية ليست كلها معدومة. ولتكن $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من هذا المستوي.

المستوي (P) يُقسم الفضاء إلى نصفي فضاء حيث أن في أحدهما يكون فيه $\vec{AM} \cdot \vec{n} > 0$

وفي الآخر يكون $\vec{AM} \cdot \vec{n} < 0$.

لكن $\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$

وبما أن $A \in (P)$ فإن $ax+by+cz+d=0$

تعريف

مجموعة النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق $ax+by+cz+d=0$ حيث a و b و c ليست كلها معدومة هي نصف فضاء مفتوح حده المستوي (P) ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$.
ونصف الفضاء الآخر هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ بحيث $ax+by+cz+d < 0$ المحدود بالمستوي (P) .

مثال -

- في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(2, 1, 1)$ و $B(4, -1, -3)$.
1- عين معادلة المستوي المتوسط للقطعة $[AB]$.
2- عين مزاوجة نصف الفضاء المحدود بالمستوي المتوسط للقطعة $[AB]$ والذي يشمل النقطة B .

الحل:

- (1) لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ إحداثياتها $(3, 0, -1)$ ، المستوي المتوسط للقطعة $[AB]$ يمر

بالنقطة I وشعاعه الناظمي \vec{AB} .

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة كيفية من الفضاء

$$\vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ تنتمي إلى هذا المستوي وهذا معناه أن}$$

$$\vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ تكافئ } x-y-2z-5=0$$

إذن معادلة (P) هي $x-y-2z-5=0$

- (2) هذا المستوي يُقسم الفضاء إلى قسمين حيث أن كل النقط في أحدهما تحقق:

$$x-y-2z-5 \geq 0 \text{ وفي القسم الآخر فإن كل النقط تحقق } x-y-2z-5 < 0$$

لأن المزاوجة التي تعبر عن نصف الفضاء الذي يشمل B والمحدود بالمستوي (P) هي $x-y-2z-5 \geq 0$

تمرين تدريبي

في كل حالة من الحالات التالية هل المستويان (P) و (Q) متقاطعان؟ متعامدان؟ متوازيان؟

$$(1) (P): x+2y-z+4=0, (Q): 2x+3y+8z-1=0$$

$$(2) (P): x+y-3z+2=0, (Q): 2x+2y+6z+7=0$$

$$(3) (P): 2x+y-z+2=0, (Q): x+2y+3z-1=0$$

الحل:

نسمي \vec{n}_1 ناظم (P) و \vec{n}_2 ناظم (Q)

(2) إذن مجموعة النقط العطاء هي سطح كرة مركزها $I(1, -1, 0)$ وطول نصف قطرها $R=3$ للدراسة الوضع النسبي لـ (P) و سطح الكرة نقوم بحساب المسافة بين مركز سطح الكرة والمستوي (P)

المسافة بين I والمستوي (P) هي $d = \frac{|2-1+0-3|}{\sqrt{4+1+1}}$ أي $d = \frac{2}{\sqrt{6}}$ بما أن $d < R$ فإن المستوي (P) يقطع سطح الكرة في دائرة.

8. دراسة مجموعة النقط من الشكل $\vec{AM} \cdot \vec{U} = k$ و $\alpha \vec{MA}^2 + \beta \vec{MB}^2 = k$

• دراسة مجموعة النقط $\vec{AM} \cdot \vec{U} = k$ حيث k عدد حقيقي.

نسمي هذه المجموعة

• حالة $k=0$

- إذا كان $\vec{U} = \vec{0}$ فإن (γ) هي كل الفضاء.

- إذا كان $\vec{U} \neq \vec{0}$ فإن (γ) هي المستوي المار بالنقطة A وشعاع ناظمه هو \vec{U}

• حالة $k \neq 0$

- إذا كان $\vec{U} = \vec{0}$ فإن (γ) هي مجموعة خالية.

- إذا كان $\vec{U} \neq \vec{0}$ ، نضع $\vec{AB} = \vec{U}$ مع $A \neq B$

مجموعة النقط المفروضة هي $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = k$

لتكن H المسقط العمودي لـ M على (AB) عندئذ:

$$\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{AB} = k \text{ يكافئ } \vec{AH} \cdot \vec{AB} = k \text{ يكافئ } \vec{AH} = \frac{k}{AB}$$

بما أن A و B و k ثابت فإنه توجد نقطة وحيدة H تحقق $\vec{AH} = \frac{k}{AB}$

إذن مجموعة النقط M التي تحقق $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = k$ هي المستوي الذي يشمل H والعمودي على (AB) .

• دراسة مجموعة النقط $\alpha \vec{MA}^2 + \beta \vec{MB}^2 = k$

- إذا كان $\alpha + \beta = 0$ و $\beta \neq 0$ فإن:

$$\alpha \vec{MA}^2 + \beta \vec{MB}^2 = \alpha \vec{MA}^2 + \beta (\vec{MA} + \vec{AB})^2$$

$$= (\alpha + \beta) \vec{MA}^2 + \beta \vec{AB}^2 + 2\beta \vec{MA} \cdot \vec{AB}$$

$$= \beta \vec{AB}^2 + 2\beta \vec{MA} \cdot \vec{AB}$$

7. المعادلة الديكارية لسطح كرة

تعريف

سطح الكرة التي مركزها I وطول نصف قطرها R هي مجموعة النقط M من الفضاء

بحيث $IM = R$

خاصية

(1) معادلة سطح الكرة التي مركزها $I(\alpha, \beta, \gamma)$ وطول نصف قطرها R في معلم متعامد

$$\text{ومتجانس هي } (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

(2) سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

تمرين تدريبي

معلم للفضاء $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(1) بين أن مجموعة النقط M التي إحداثياتها تحقق المعادلة:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$$

الأساسية (المركز ونصف القطر).

(2) ادرس وضعية المستوي (P) ذو المعادلة $2x + 2y + z - 3 = 0$ بالنسبة إلى الكرة.

✓ الحل:

(1) من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ ومن أجل كل y من \mathbb{R} لدينا:

$$y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$$

إذن المعادلة العطاء تكتب على الشكل $(x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + z^2 - 7 = 0$

$$\text{أي } (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$$

$$2\beta \vec{MA} \cdot \vec{AB} = -\beta \vec{AB}^2 + k \quad \text{يكافئ} \quad \alpha \vec{MA}^2 + \beta \vec{MB}^2 = k$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{AB} = \frac{-\beta \vec{AB}^2 + k}{2\beta} \quad \text{يكافئ}$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{AB} = k' \quad \text{يكافئ}$$

مجموعة النقط $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = k'$ درست في الحالة الأولى

- إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فإن الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ لها مرجح G يحقق $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$ من أجل كل نقطة كيفية M لدينا،

$$\alpha \vec{MA}^2 + \beta \vec{MB}^2 = (\alpha + \beta) \vec{MG}^2 + \alpha \vec{GA}^2 + \beta \vec{GB}^2$$

$$\alpha \vec{GA}^2 + \beta \vec{GB}^2 + (\alpha + \beta) \vec{MG}^2 = k \quad \text{يكافئ} \quad \alpha \vec{MA}^2 + \beta \vec{MB}^2 = k$$

$$\vec{MG}^2 = \frac{k - \alpha \vec{GA}^2 - \beta \vec{GB}^2}{\alpha + \beta} \quad \text{يكافئ}$$

$$k' = \frac{k - \alpha \vec{GA}^2 - \beta \vec{GB}^2}{\alpha + \beta} \quad \text{بوضع} \quad \vec{MG}^2 = k' \quad \text{تصبح مجموعة النقط } (y) \text{ هي } \vec{MG}^2 = k'$$

- إذا كان $k' < 0$ فإن (y) هي \emptyset

- إذا كان $k' = 0$ فإن $(y) = \{G\}$

- إذا كان $k' > 0$ فإن (y) سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $R = \sqrt{k'}$

تمرين تدريبي

معطى للفضاء، $A(1,1,1)$ ، $B(0,1,1)$ نقطتين منه.

(1) عين مجموعة النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق $2\vec{MA}^2 + 3\vec{MB}^2 = 2$

(2) عين مجموعة النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق $2\vec{MA}^2 - 2\vec{MB}^2 = -5$

✓ الحل:

(1) ليكن G مرجح الجملة $\{(B, 3), (A, 2)\}$ تحقق $2\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$ من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا،

$$2\vec{MA}^2 + 3\vec{MB}^2 = 5\vec{MG}^2 + 2\vec{GA}^2 + 3\vec{GB}^2 = 5\vec{MG}^2 + \frac{21}{4}\vec{GB}^2$$

$$2\vec{MA}^2 + 3\vec{MB}^2 = 2 \quad \text{يكافئ} \quad \vec{MG}^2 = \frac{2}{5} - \frac{21}{20}\vec{GB}^2$$

$$G(\frac{2}{5}, 1, 1) \quad \text{ومنه} \quad z_G = \frac{2+3}{5} = 1, \quad y_G = \frac{2+3}{5} = 1, \quad x_G = \frac{2+3 \times 0}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\text{إذن} \quad \vec{GB}^2 = (\frac{2}{5} - 0)^2 + (1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 = \frac{4}{25} \quad \text{و} \quad \vec{MG}^2 = \frac{2}{5} - \frac{21}{20} \times \frac{4}{25} = \frac{29}{125}$$

وبالتالي (y) هي سطح كرة مركزها G وطول نصف قطرها $R = \sqrt{\frac{29}{125}}$

بما أن $2 - 2 = 0$ فإن الجملة $\{(B, -2), (A, 2)\}$ ليس لها مرجح وبالتالي:

$$2\vec{MA}^2 - 2\vec{MB}^2 = 2\vec{MA}^2 - 2(\vec{MA} + \vec{AB})^2 = -4\vec{MA} \cdot \vec{AB} - 2\vec{AB}^2$$

$$\vec{AB}^2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$-4\vec{MA} \cdot \vec{AB} - 2 = -5 \quad \text{يكافئ} \quad 2\vec{MA}^2 - 2\vec{MB}^2 = -5$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{AB} = \frac{3}{4} \quad \text{يكافئ}$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{AB} = \frac{3}{4} \quad \text{يكافئ} \quad x - 1 = \frac{3}{4} \quad \text{يكافئ} \quad x = \frac{7}{4}$$

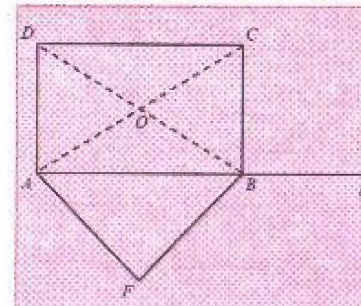
إذن مجموعة النقط المطلوبة هي المستوي ذو المعادلة $x = \frac{7}{4}$

تطبيقاً



تطبيق 1

المجموعة الجداء السلمي في المستوى



مستطيل مركزه النقطة O
حيث $AD=3$ و $AB=4$

E نقطة بحيث $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ و F
نقطة بحيث المثلث ABF متقايس
الأضلاع مرسوم خارج المستطيل.

- 1- احسب $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$
- 2- احسب $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FB}$ و $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BA}$

✓ الحل:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB^2 = -16 \quad (1)$$

لأن D مسقطها A على (AB)

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{AB}) = 2(AB^2) = 32$$

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BA} = BF \times BA \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = AB^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 16 \times \frac{1}{2} = 8 \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FB} = AF \times FB \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \times 16 = -8$$

تطبيق 2

المجموعة الجداء السلمي لمماس لدائرة

لتكن (C) مجموعة النقط من المستوي ذات المعادلة:

$$(I) \quad x^2 - 3x + y^2 + 4y = 0$$

- (1) بين أن (C) هي دائرة يطلب تعيين مركزها I ونصف قطرها.
- (2) لتكن A نظيرة O بالنسبة إلى I حيث O مبدأ العلم المتعامد والمتجانس
بين أن A تنتمي إلى (C) معينا معادلة المماس لـ (C) عندها.

✓ الحل:

$$(1) \text{ المعادلة (I) تكتب } (x-\frac{3}{2})^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{4}$$

ومنه نستنتج أن (C) دائرة مركزها $I(\frac{3}{2}, -2)$ وطول نصف قطرها $\frac{5}{2}$

(2) بما أن O تنتمي إلى (C) و A نظيرة O بالنسبة إلى I فإن A تنتمي إلى (C) .

لتكن $M(x, y)$ نقطة من المماس المطلوب تحقق عند M $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$$\text{إحداثيات } A \text{ هي } (3, -4) \text{ ومنه } \overrightarrow{AM}(x-3, y+4) \text{ و } \overrightarrow{IA}(\frac{3}{2}, -2)$$

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \text{ يكافئ } 3x - 4y - 25 = 0$$

إذن معادلة المماس لـ (C) عند النقطة A هي $3x - 4y - 25 = 0$

تطبيق 3

المجموعة الجداء السلمي تعيين أطوال الارتفاعات في مثلث

لتكن النقط $C(3, 5)$ ، $B(-3, -3)$ ، $A(2, -1)$

(1) بين أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

(2) عين معادلة العمود الرسوم من A في المثلث ABC

(ب) أوجد طول هذا الارتفاع.

(3) استنتج مساحة المثلث ABC

(4) عين أطوال الارتفاعات الأخرى المتعلقين بالمثلث ABC .

✓ الحل:

$$(1) \quad \overrightarrow{BC}(6, 8), \overrightarrow{AC}(1, 6), \overrightarrow{AB}(-5, -2)$$

\overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B ، C لا تقع على استقامة واحدة.

(2) العمود الرسوم من A ناظمه هو \overrightarrow{BC}

لتكن $M(x, y)$ نقطة من هذا العمود إذن فهي تحقق $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ومنه ينتج:

$$3x + 4y - 2 = 0$$

(ب) لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \times BC \cos(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC})$$

$$\text{ومنه ينتج } \left| \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \right| = BH \times BC$$

$$BH = \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{BC}|}{BC} = \frac{46}{10} = 4,6 \text{ إذن}$$

حسب نظرية فيثاغورس نجد $AH = \sqrt{BA^2 - BH^2} = 2,8$

(3) مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{1}{2} AH \times BC = 14$

(4) ليكن h_1 طول الارتفاع المرسوم من B في المثلث ABC

$$h_1 = \frac{28}{AC} = \frac{28}{\sqrt{37}} = 4,6 \text{ ومنه } \frac{1}{2} h_1 \cdot AC = 14$$

ليكن h_2 طول الارتفاع المرسوم من C في المثلث ABC

$$h_2 = \frac{28}{AB} = 5,20 \text{ ومنه } \frac{1}{2} h_2 \cdot AB = 14$$

تطبيق 4

حساب الجداء السلمي وتعيين قيمة مخرية لزاوية

$ABCD EFGH$ متوازي مستطيلات قائم حيث $AB=2$ و $AD=AE=1$ ولتكن النقط K, J, I منتصفات القطع $[DE], [DG], [EB]$ على التوالي.

نعتبر العلم المتعامد والتجانس $(D, \vec{DA}, \frac{1}{2}\vec{DC}, \vec{DI})$



- عين إحداثيات الشعاعين \vec{IK} و \vec{IJ} ثم احسب $\|\vec{IK}\|$ و $\|\vec{IJ}\|$ و $\vec{IJ} \cdot \vec{IK}$
- عين قيمة مخرية للزاوية \widehat{JIK}

الحل:

$$(1) F(1, 2, 1), E(1, 0, 1), D(0, 0, 0), C(0, 2, 0), B(1, 2, 0), A(1, 0, 0)$$

$$K\left(1, 1, \frac{1}{2}\right), J\left(0, 1, \frac{1}{2}\right), I\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right); H(0, 0, 1), G(0, 2, 1)$$

$$\vec{IK} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \vec{IJ} = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$(2) \text{ لدينا } \vec{IJ} \cdot \vec{IK} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$\|\vec{IJ}\| = \|\vec{IK}\| = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ و}$$

$$\cos(\widehat{JIK}) = \frac{\vec{IJ} \cdot \vec{IK}}{\|\vec{IJ}\| \|\vec{IK}\|} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3}{5} \text{ فإن } \vec{IJ} \cdot \vec{IK} = \|\vec{IJ}\| \|\vec{IK}\| \cos(\widehat{JIK})$$

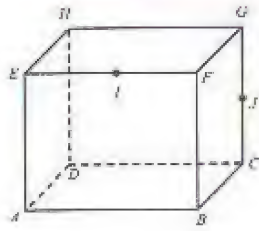
بما أن القيمة المخرية للزاوية \widehat{JIK} هي $53,13^\circ$

تطبيق 6

حساب الجداء السلمي لشعاعين في الفضاء

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a ، ولتكن النقطتان I و J منتصفتي القطعتين $[EF]$ و $[GC]$ على التوالي.

احسب $\vec{JH} \cdot \vec{JD}, \vec{IE} \cdot \vec{IA}, \vec{EI} \cdot \vec{GJ}, \vec{EF} \cdot \vec{FC}, \vec{EI} \cdot \vec{EA}$



الحل:

$$\vec{EI} \cdot \vec{EA} = 0$$

$$\vec{EI} \cdot \vec{FC} = \vec{EI} \cdot \vec{ED} = \vec{EI} \cdot (\vec{EA} + \vec{AD})$$

$$= \vec{EI} \cdot \vec{EA} + \vec{EI} \cdot \vec{AD} = 0 + 0 = 0$$

$$\vec{EI} \cdot \vec{GJ} = \left(\frac{1}{2}\vec{EI}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{CG}\right) = \frac{1}{4}(\vec{EF} \cdot \vec{CG}) = \frac{1}{4}(\vec{EF} \cdot \vec{BF}) = 0$$

$$\vec{IE} \cdot \vec{IA} = \vec{IE} \cdot (\vec{IE} + \vec{EA}) = \vec{IE} \cdot \vec{IE} + \vec{IE} \cdot \vec{EA} = IE^2 + 0 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\vec{JH} \cdot \vec{JD} = (\vec{JG} + \vec{GH})(\vec{JC} + \vec{CD}) = \vec{JG} \cdot \vec{JC} + \vec{JG} \cdot \vec{CD} + \vec{GH} \cdot \vec{JC} + \vec{GH} \cdot \vec{CD}$$

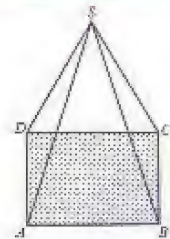
$$= -\frac{a^2}{4} + 0 + 0 + a^2 = \frac{3}{4}a^2$$

تطبيق 8

حساب الجداء السلمي لشعاعين في الفضاء

$ABCD S$ هرم قاعدته مربع ورأسه S بحيث كل الأحرف لها نفس الطول a

احسب $\vec{SA} \cdot \vec{AC}, \vec{SA} \cdot \vec{SC}, \vec{SA} \cdot \vec{SB}$



الحل:

$$\vec{SA} \cdot \vec{SB} = SA \times SB \cos(60^\circ) = \frac{SA^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{SA} \cdot \vec{SC} = \vec{SA} \cdot (\vec{SB} + \vec{BC}) = \vec{SA} \cdot \vec{SB} + \vec{SA} \cdot \vec{BC}$$

$$= \frac{a^2}{2} + \vec{SA} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2} - \vec{AS} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

$$\vec{SA} \cdot \vec{AC} = \vec{SA} \cdot (\vec{AD} + \vec{DC}) = \vec{SA} \cdot \vec{AD} + \vec{SA} \cdot \vec{DC}$$

$$= -\vec{AS} \cdot \vec{AD} + \vec{SA} \cdot \vec{AB} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = -a^2$$

تطبيق 7

تعيين قيمة مخرية لزاوية في الفضاء

- هرم منتظم قاعدته المربع $ABCD$ ، وليكن النقطتان I و J منتصفي $[AD]$ و $[BC]$ على الترتيب.
- عين قيمة مخرية للزاوية \widehat{EIJ} .
 - لتكن F نقطة بحيث $ABCF$ ثنائي وجوه منتظم.
 - عين قيمة مخرية للزاوية \widehat{EIF} .

الحل:

(1) نضع $AB = a$

$$\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EJ} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI}) \cdot (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BJ}) = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ}$$

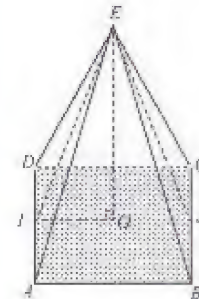
$$= a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$(1) \dots \dots \dots \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EJ} = EI \times EJ \times \cos(\widehat{EIJ})$$

$$(2) \dots \dots \dots \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EJ} = \frac{a^2}{4}$$

$$\cos(\widehat{EIJ}) = \frac{\frac{a^2}{4}}{EI \times EJ} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{5a^2}{4}} = \frac{1}{5}$$

من (1) و (2) نجد $\widehat{EIJ} = 78.46^\circ$ إذن القيمة المخرية للزاوية \widehat{EIJ} هي 78.46° .



(2) بما أن F هي نظيرة E بالنسبة إلى مركز المربع $ABCD$ فإن $\widehat{EIF} = 2\widehat{EIO}$

$$\cos(\widehat{EIO}) = \frac{IO}{IE} = \frac{0.5 AB}{IE} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ولمنا نجد $\widehat{EIO} = 63.43^\circ$ وبالتالي $\widehat{EIF} = 126.87^\circ$

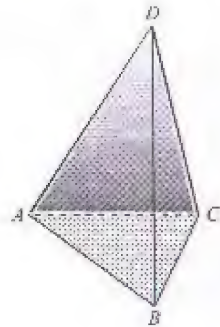
تطبيق 8

إثبات التعامد في الفضاء باستعمال الجداء السلمي

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه a

- احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ ماذا تستنتج حول المستقيمين $\{AB\}$ و $\{CD\}$ ؟

الحل:



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}a^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}a^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

بما أن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ فإن الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} متعامدان وبالتالي $\{AB\}$ و $\{CD\}$ متعامدان.

تطبيق 9

تعيين حجم رباعي في الفضاء

- لتكن النقط $A(3, 0, 3)$ ، $B(1, 4, -3)$ ، $C(1, 0, 3)$ ، $D(1, 0, -3)$ من الفضاء
- بين أن المثلث BCD قائم في D ثم عين مساحته.
 - بين أن المستقيم (AC) عمودي على المستوى (BCD) .
 - عين حجم رباعي الوجوه A .

الحل:

$$(1) \text{ لدينا } \overrightarrow{DB}(0, 4, 0), \overrightarrow{DC}(0, 0, 6)$$

بما أن $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ فإن المثلث BCD قائم في D

مساحة المثلث BCD هي $\frac{1}{2}DC \times DB$ أي 12

$$(2) \text{ لدينا } \overrightarrow{AC}(-2, 0, 0)$$

بما أن $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ و $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ فإن (AC) عمودي على (DB) وعمودي على (DC) . فهو إذن عمودي على تقاطعهما وبالتالي فهو عمودي على المستوى (BCD) .

(3) حجم رباعي الوجوه يساوي $\frac{1}{3}\beta h$ حيث β مساحة القاعدة و h ارتفاعه.

مساحة القاعدة هي $\beta = 12$ وارتفاعه $h = AC = 2$ إذن حجمه هو $\frac{1}{3}(12 \times 2) = 8$.

تطبيق 10

تعمد مستقيم ومستوي

رباعي وجوه منتظم طول حرفه a (كل أحرقة متساوية الطول).
 K, J, I منتصفات القطع $[BC], [AC], [AD]$ على التوالي.
 لتكن A' مركز ثقل المثلث BCD

(1) احسب $\vec{CD} \cdot \vec{AD}$ (2) احسب $\vec{JK} \cdot \vec{AD}$ و $\vec{IK} \cdot \vec{AD}$ (3) بين أن المستقيم (AA') عمودي على المستوي (BCD)

الحل:

$$\vec{CD} \cdot \vec{AD} = \vec{DC} \cdot \vec{DA} = DC \times CA \times \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2} \quad (1)$$

$$\vec{JK} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2} \vec{CD} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{4} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{IK} \cdot \vec{AD} &= (\vec{IJ} + \vec{KJ}) \cdot \vec{AD} = \vec{IJ} \cdot \vec{AD} + \vec{JK} \cdot \vec{AD} \\ &= -\frac{1}{2} \vec{BA} \cdot \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{CD} \cdot \vec{AD} = -\frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{CD} \cdot \vec{AD} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AA'} \cdot \vec{CD} &= (\vec{AI} + \vec{IA'}) \cdot \vec{CD} = \vec{AI} \cdot \vec{CD} + \vec{IA'} \cdot \vec{CD} = (\vec{AC} + \vec{CI}) \cdot \vec{CD} + \frac{1}{3} \vec{ID} \cdot \vec{CD} \quad (3) \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{CD} + \vec{CI} \cdot \vec{CD} + \frac{1}{3} (\vec{IC} + \vec{CD}) \cdot \vec{CD} = \vec{AC} \cdot \vec{CD} + \vec{CI} \cdot \vec{CD} + \frac{1}{3} \vec{IC} \cdot \vec{CD} + \frac{1}{3} \vec{CD} \cdot \vec{CD} \\ &= -\frac{1}{2} a^2 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{3} a^2 = 0 \end{aligned}$$

إذن (AA') عمودي على (CD) وبنفس الكيفية نبين أن (AA') عمودي على (CB) وبالتالي (AA') عمودي على (BCD) .

تطبيق 11

حساب طول ارتفاع رباعي وجوه

$ABCD$ رباعي وجوه بحيث المثلثات ABC, ABD, ACD قائمة عند A ومتساوية الساقين و $AD = AC = AB = a$ ، نسمي A_1 مركز ثقل المثلث BCD

(1) بين أن المستقيم (AA_1) عمودي على المستوي (BCD)
 (2) بالتعبير عن حجم الرباعي $ABCD$ بطريقتين مختلفتين، احسب AA_1 .

الحل:

(1) حتى يكون المستقيم (AA_1) عموديا على المستوي (BCD) يجب أن يكون (AA_1) عموديا على المستقيمين (CB) و (CD) :

$$\begin{aligned} \vec{AA_1} \cdot \vec{CB} &= (\vec{AB} + \vec{BA_1}) \cdot \vec{CB} = \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \vec{AA_1} \cdot \vec{CB} = \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AB}) + \frac{1}{3} (\vec{BD} + \vec{BC}) \cdot \vec{CB} \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{BD} \cdot \vec{CB} + \frac{1}{3} \vec{BC} \cdot \vec{CB} = \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} - \frac{1}{3} \vec{BD} \cdot \vec{BC} - \frac{1}{3} \vec{BC} \cdot \vec{BC} \\ &= 0 + a^2 - \frac{1}{3} \times BD \times BC \times \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3} BC^2 = 0 + a^2 - \frac{1}{3} (\sqrt{2}a)(\sqrt{2}a) \times \frac{1}{2} - \frac{2}{3} a^2 \\ &= a^2 - \frac{1}{3} a^2 - \frac{2}{3} a^2 = 0 \end{aligned}$$

لأن المثلث BCD متقايس الأضلاع طول ضلعه $\sqrt{2}a$.

$$\begin{aligned} \vec{AA_1} \cdot \vec{CD} &= (\vec{AD} + \vec{DA_1}) \cdot \vec{CD} = \vec{AD} \cdot \vec{CD} + \vec{AA_1} \cdot \vec{CD} = \vec{DA} \cdot \vec{CD} + \frac{1}{3} (\vec{DB} + \vec{DC}) \cdot \vec{CD} \\ &= \vec{DA} \cdot \vec{DC} + \frac{1}{3} \vec{DB} \cdot \vec{CD} - \frac{1}{3} \vec{DC} \cdot \vec{CD} = \vec{DA} \cdot \vec{DC} - \frac{1}{3} \vec{DB} \cdot \vec{DC} - \frac{1}{3} \vec{DC} \cdot \vec{DC} \\ &= a \times \sqrt{2}a \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{2}a \sqrt{2}a \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} 2a^2 \\ &= a^2 - \frac{1}{3} a^2 - \frac{2}{3} a^2 = 0 \end{aligned}$$

إذن (AA_1) عمودي على (CD) وعمودي على (CB)

وبما أن (CB) و (CD) متقاطعان فإن (AA_1) عمودي على (BCD) .

(2) باعتبار أن رباعي الوجوه $ABCD$ قاعدته المثلث ABC يكون ارتفاعه الضلع BD

وعليه الحجم هو $V = \frac{1}{3} \times BD \times \beta$ حيث β مساحة المثلث ABC والتي تساوي $\frac{a^2}{2}$

$$\text{إذن } V = \frac{1}{3} \times \sqrt{2}a \times \frac{a^2}{2} \quad (1)$$

باعتبار أن قاعدة رباعي الوجوه هي المثلث BDC يكون $V = \frac{1}{3} \times AA_1 \times \beta_1$ حيث β_1

مساحة المثلث BDC وتساوي $\frac{1}{2} CD \cdot CB \sin \frac{\pi}{3}$

$$\text{إذن } V = \frac{1}{3} \times AA_1 \times \frac{1}{2} CD \cdot CB \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} AA_1 \times \frac{1}{2} CB^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \times AA_1 \times \frac{1}{2} 2a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \dots\dots\dots V = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 AA_1$$

من (1) و (2) نجد $\frac{\sqrt{3}}{6} a^2 AA_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3$ ومنه نجد $AA_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} a$

تطبيق 12

تعيين معادلة مستوي

في كل حالة من الحالات التالية، المستوي (p) ممثل بواسطة معادلته الديكارتية A و B نقطتان علم إحداثياتهما.

بعد التحقق من أن (AB) ليس عموديا على (p) أعط معادلة للمستوي (q) العمودي على (p) ولماز من A و B .

(أ) $B(0,1,1)$ ، $A(1,0,0)$ ، $(p) : x+y+z=0$

(ب) $B(1,0,1)$ ، $A(1,2,0)$ ، $(p) : x+z=0$

✓ الحل :

لتكن $ax+by+cz+d=0$ معادلة المستوي (q) الذي نأظمه $\vec{n}(a,b,c)$

(أ) نأظم (p) هو $\vec{n}_1(1,1,1)$ و $\vec{AB}(-1,1,1)$

بما أن $\vec{AB} \cdot \vec{n}_1 = 1$ فإن (AB) ليس عموديا على المستوي (p)

بما أن (q) عمودي على (p) فإن $\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$ ومنه ينتج $a+b+c=0$ (1)

A تنتمي إلى (q) تعني $a+d=0$ (2)

B تنتمي إلى (q) تعني $b+c+d=0$ (3)

من (1) و (2) و (3) نجد $d=a=0$ و $c=-b$

إذن (q) معادلته $by-bz=0$

وبما أن \vec{n} ليس معنوما و $a=0$ فإن $b \neq 0$

وبالتالي معادلة (q) تصبح $y-z=0$

(ب) نأظم (p) هو $\vec{n}_2(1,0,1)$ ولدينا $\vec{AB}(0,-2,1)$

بما أن $\vec{AB} \cdot \vec{n}_2 = 1$ فإن (AB) ليس عموديا على المستوي (p)

(q) عمودي على (p) يعني أن $\vec{n} \cdot \vec{n}_2 = 0$

وهذا يعني أيضا $a+c=0$ (1)

A تنتمي إلى (q) تعني أن $a+2b+d=0$ (2)

B تنتمي إلى (q) تعني أن $a+c+d=0$ (3)

من (1) و (2) و (3) نجد $d=0$ و $c=-a$ و $b=-\frac{a}{2}$

ومنه معادلة (q) تصبح $ax-\frac{a}{2}y-az=0$

وبما أن $a \neq 0$ فإن معادلة (q) تصبح $x-\frac{1}{2}y-z=0$

تطبيق 13

تعيين معادلة مستوي عمودي على مستويين

نعتبر المستويين (p) و (q) العرفين بمعادلتيهما الديكارتية

$(p) : x-2y+3z-5=0$ و $(q) : x+y+z+1=0$

(1) بين أن (p) و (q) متقاطعان في المستقيم (d) .

(2) بين أن المستقيم (d) هو مجموعة النقاط M بحيث :

$(z, \frac{2}{3}z-2, \frac{5}{3}z+1) \in M$ مع z عدد حقيقي

(3) عين شعاع توجيه المستقيم (d)

(4) عين معادلة المستوي (R) العمودي على (p) و (q) و المار بالنقطة $A(2,5,-2)$

✓ الحل :

(1) حتى يكون (p) و (q) غير متقاطعين يجب أن يكون نأظماهما مستقلين خطيا

ليكن \vec{n}_1, \vec{n}_2 نأظما (p) و (q) على الترتيب.

$\vec{n}_1(1,-2,3)$ ، $\vec{n}_2(1,1,1)$

واضح أن الشعاعين \vec{n}_1 و \vec{n}_2 غير مرتبطين وبالتالي (p) و (q) متقاطعان.

(2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (d) إحداثياتها تحقق معادلة (p) و (q) في آن واحد،

وهذا يعني أن $x-2y+3z-5=0$ (1) و $x+y+z+1=0$ (2)

من (1) نجد $x=2y-3z+5$ نعوضه في (2) نجد $3y-2z+6=0$ أي $y=\frac{2}{3}z-2$

إذن $x=2(\frac{2}{3}z-2)-3z+5=-\frac{5}{3}z+1$

وبالتالي إحداثيات M هي $(z, \frac{2}{3}z-2, \frac{5}{3}z+1)$ مع $z \in \mathbb{R}$

(3) من أجل $z=0$ نحصل على النقطة M_0 من (d) إحداثياتها $M_0(1,-2,0)$

ومن أجل $z=3$ نحصل على النقطة M_1 تنتمي إلى (d) إحداثياتها $M_1(-4,0,3)$

إذن شعاع توجيه (d) هو $\vec{M_0M_1}$ أي $\vec{M_0M_1}(-5,2,3)$

(4) لتكن $ax+by+cz+d=0$ معادلة (R) مع $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

(R) عمودي على (p) يعني $\vec{n}_R \cdot \vec{n}_p = 0$ أي $a-2b+3c=0$ (1)

(R) عمودي على (q) يعني $\vec{n}_R \cdot \vec{n}_q = 0$ أي $a+b+c=0$ (2)

$A(2,5,-2)$ تنتمي إلى (R) تعني $2a+5b+2c+d=0$ (3)

من (1) و (2) و (3) نجد $a=-\frac{5}{3}c$ و $b=\frac{2}{3}c$ و $d=2c$

(2) \vec{n} يعامد \vec{AB} هذا معناه $2x-2=0$

\vec{n} يعامد \vec{AC} هذا معناه $y+2=0$

ومنه ينتج أن $x=1$ و $y=-2$ وبالتالي $\vec{n}(1, -2, 2)$

(3) بما أن \vec{n} عمودي على \vec{AB} و \vec{AC} فإنه عمودي على (ABC)

وبالتالي فهو يمثل تاطما للمستوي (ABC)

إذن $(ABC): x-2y+2z+d=0$

A تنتمي إلى (ABC) هذا معناه $2-4+4+d=0$ ومنه $d=-2$

إذن $(ABC): x-2y+2z-2=0$

تطبيق 16

حساب حجم رباعي الوجود

لتكن النقط $H(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $S(4, 0, 4)$, $C(4, -4, -3)$, $R(2, 4, -1)$, $A(0, 0, 1)$

(1) بين أن المثلث ABC قائم في A

(2) بين أن الشعاع \vec{SH} عمودي على الشعاعين \vec{AB} و \vec{AC} ، ثم استنتج

معادلة المستوي (ABC) .

(ب) تحقق أن النقطة H تنتمي إلى المستوي (ABC) .

(3) بين أن $[SH]$ هو ارتفاع في رباعي الوجود $SABC$.

(ب) احسب حجم هذا الرباعي.

✓ الحل:

(1) لدينا $\vec{AB}(2, 4, -2)$ و $\vec{AC}(4, -4, -4)$

بما أن $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8 - 16 + 8 = 0$ فإن المثلث ABC قائم في A

(2) $\vec{SH}(-\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{2})$ ، $\vec{SO}(-\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{2})$ ، $\vec{AB}(2, 4, -2)$ ، $\vec{AC}(4, -4, -4)$

ومنه \vec{SH} عمودي على \vec{AB} وعلى \vec{AC}

بما أن \vec{SH} عمودي على \vec{AB} وعلى \vec{AC} فإن (SH) عمودي على (ABC)

وبالتالي يمكن اعتبار \vec{SH} كشعاع ناظم للمستوي (ABC) .

وعليه معادلة (ABC) هي $-\frac{7}{2}x - \frac{7}{2}z + d = 0$

بما أن A تنتمي إلى (ABC) فإن $-\frac{7}{2} \times 0 - \frac{7}{2} \times 1 + d = 0$ ومنه $d = \frac{7}{2}$

إذن معادلة (ABC) هي $-x - z + 1 = 0$

(ب) بما أن $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$ فإن H تنتمي إلى المستوي (ABC)

(3) (أ) بما أن \vec{SH} ناظم للمستوي (ABC) و H تنتمي إلى (ABC) فإن

$[SH]$ هو الارتفاع في الرباعي $SABC$.

(ب) حجم الرباعي الوجود هو $V = \frac{1}{3} \times SH \times \beta$ حيث β مساحة المثلث ABC

إذن $V = \frac{1}{3} \times SH \times \frac{AB \times AC}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \times \frac{2\sqrt{6} \times 4\sqrt{3}}{2} = \frac{84}{3} = 28$

تطبيق 17

التعامد وحساب المسافة

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم بحيث $AB=2$ ، $GC=BC=1$

و I منتصف القطعة $[AB]$.

(1) أوجد معلما متعامدا ومتجانسا مبنوه A بحيث يمكنك التعبير عن إحداثيات النقاط بسهولة.

(2) عرین معادلة المستوي (IFH)

(3) احسب المسافة بين النقطة G والمستوي (IFH) .

(4) عرین المسافة بين النقطة G والمستقيم (IH) .

هل المسقط العمودي للنقطة G على المستوي (IFH) ينتمي إلى (IH) ؟

✓ الحل:

(1) العلم المختار هو $(A, \frac{1}{2}\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ وفي هذا العلم لدينا:

$A(0, 0, 0)$ ، $B(2, 0, 0)$ ، $C(2, 2, 0)$ ، $D(0, 1, 0)$ ، $E(0, 0, 1)$ ، $F(2, 0, 1)$ ، $G(2, 1, 1)$ ، $H(0, 1, 1)$ ، $I(1, 0, 0)$

(2) معادلة (IFH) من الشكل $ax+by+cz+d=0$

(1) $a+d=0$ معناه (IFH) تنتمي إلى I

(2) $2a+c+d=0$ معناه (IFH) تنتمي إلى F

(3) $b+c+d=0$ معناه (IFH) تنتمي إلى H

من (1) و (2) و (3) نجد $c=d$ و $a=-d$ و $b=-2d$

وبما أن $d \neq 0$ فإن $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

نعوض a, b, c في معادلة (IFH) نجد $-dx-2dy+dz+d=0$

بالقسمة على d نجد $-x-2y+z+1=0$

(3) المسافة بين النقطة G والمستوي (IFH) هي $\frac{|-x_0-2y_0+z_0+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

(4) لتكن K المسقط العمودي للنقطة G على (IH) ولتكن $K(x, y, z)$

$$(2) \quad \vec{SA} \cdot \vec{SC} = 0 \text{ تكافئ } h^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0 \text{ يكافئ } h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\text{لدينا } SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} \text{ ومنه } SA = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = a$$

$$(3) \quad \text{مساحة الهرم } SABCD \text{ هي } \beta$$

$$\text{حيث } \beta = 4 \times SA \times SD \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + a^2$$

$$\beta = 4 \times a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + a^2 = (2\sqrt{3} + 1)a^2$$

تطبيق 19

كيفية إيجاد المسافة بين نقطة ومستقيم

- (p) و (q) مستويان معادلتهما على الترتيب $x+y+z=0$ ، $x+y-2z-1=0$
 و A نقطة إحداثياتها (2, 1, 2)
 (1) بين أن المستويين (p) و (q) متعامدان.
 (2) احسب المسافة بين A والمستويين (p) و (q)
 (3) استنتج المسافة بين A والمستقيم (d) الناتج من تقاطع (p) و (q)

✓ الحل:

$$(1) \quad \text{لدينا } \vec{n}_p(1, 1, 1), \vec{n}_q(1, 1, -2)$$

$$(p) \text{ و } (q) \text{ متعامدان يعني أن } \vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = 0$$

$$\text{بما أن } \vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = 1+1-2=0 \text{ فإن } (p) \text{ و } (q) \text{ متعامدان.}$$

$$(2) \quad \text{لتكن } h_1 \text{ المسافة بين } A \text{ و } (p) \text{ و } h_2 \text{ المسافة بين } A \text{ و } (q).$$

$$h_2 = \frac{|2+1+2|}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ و } h_1 = \frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$(3) \quad H_2, H_1 \text{ السقطان العموديان لـ } A \text{ على } (p) \text{ و } (q) \text{ على التوالي.}$$

$$\text{ولتكن } A' \text{ السقط العمودي لـ } A \text{ على } (d)$$

$$\text{بما أن } (p) \text{ و } (q) \text{ متعامدان فإن الرباعي } H_1 H_2 A A' \text{ مستطيل}$$

$$\text{وبالتالي } [AA'] \text{ يكون قطرا لهذا المستطيل.}$$

$$\text{إذن } AA' = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \sqrt{\frac{25}{3} + \frac{4}{6}} = 3$$

طريقة ثانية :

إحداثيات النقطة A' تحقق :

$$\vec{AA'} \perp \vec{CD} \text{ حيث } \vec{CD} \text{ هو شعاع توجيه } (d) \text{ و } A' \text{ تنتمي إلى } (p) \text{ و } (q).$$

$$\text{إحداثيات } C \text{ و } D \text{ التي هي من الشكل } (x, y, z) \text{ تحقق معادلتين } (p) \text{ و } (q)$$

$$\text{إذن } \vec{GH} \perp \vec{HK} \text{ و } \vec{GH} \text{ يوازي } \vec{HK}$$

$$\text{لدينا } \vec{GH}(-1, 1, 1) \text{ و } \vec{HK}(\alpha-2, \beta-1, \gamma-1)$$

$$\vec{GH} \perp \vec{HK} \text{ معناه أن } -\alpha+2+\beta-1+\gamma-1=0 \text{ أي } -\alpha+\beta+\gamma=0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha = -\lambda \\ \beta = 1+\lambda \\ \gamma = 1+\lambda \end{cases} \text{ ومنه ينتج } \vec{HK} = \lambda \vec{GH}$$

$$\text{نعوض عبارة } \alpha, \beta, \gamma \text{ في (1) نجد } \lambda+1+\lambda+1+\lambda=0 \text{ ومنه } \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$\text{إذن } K\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

وبالتالي المسافة بين G و (IH) هي GK

$$\text{حيث } GK = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$\text{- لو كان السقط العمودي للنقطة G على (IHI) ينتمي إلى (IHI) لكان } GK = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\text{وبما أن } GK = \sqrt{\frac{8}{3}} \text{ فإن السقط العمودي للنقطة G على (IFH) لا ينتمي إلى (IH).}$$

كيفية إيجاد المساحة الكلية لهرم

تطبيق 18

SABCD هرم منتظم قاعدته ABCD مربعة الشكل. طول ضلعها a

و O مركز الربع. وبحيث طول الارتفاع [SO] هو h

$$(1) \quad \text{باستعمال العلاقات } \vec{SA} = \vec{SO} + \vec{OA} \text{ و } \vec{SC} = \vec{SO} + \vec{OC} \text{ بين أن :}$$

$$\vec{SA} \cdot \vec{SC} = h^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$(2) \quad \text{كيف نختار h بحيث يكون الضلعان } SA \text{ و } SC \text{ متعامدين.}$$

$$\text{ثم بين أن } SA = a$$

$$(3) \quad \text{احسب المساحة الكلية لهذا الهرم.}$$

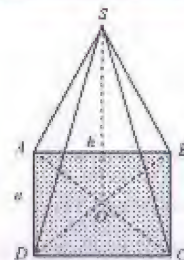
✓ الحل :

(1)

$$\vec{SA} \cdot \vec{SC} = (\vec{SO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{SO} + \vec{OC})$$

$$= \vec{SO} \cdot \vec{SO} + \vec{SO} \cdot \vec{OC} + \vec{OA} \cdot \vec{SO} + \vec{OA} \cdot \vec{OC}$$

$$= h^2 + 0 + 0 - \vec{OA}^2 = h^2 - \frac{1}{2}a^2$$



إذن $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC} + \vec{MD}$ يكافئ $2\vec{MI} = 2\vec{MJ}$ يكافئ $\vec{IJ} = \vec{0}$ وهذا خطأ ومنه لا توجد نقط M تحقق المساواة المفروضة.

$$MI = MJ \text{ يكافئ } \left\| \vec{MA} + \vec{MB} \right\| = \left\| \vec{MC} + \vec{MD} \right\| \quad (2)$$

ومنه M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$

إذن (p_1) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \left(\vec{MI} + \vec{IA} \right)^2 + \left(\vec{MI} + \vec{IB} \right)^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) \quad (3) \\ &= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{0} = 2MI^2 + \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 \\ &= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \end{aligned}$$

ب) وب نفس الطريقة السابقة نجد $MC^2 + MD^2 = 2MJ^2 + \frac{1}{2}CD^2$

المساواة $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ تصبح $2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 2MJ^2 + \frac{1}{2}CD^2$

وبما أن $AB = CD$ فإن هذه المساواة تصبح $MI^2 = MJ^2$ أي $MI = MJ$

وهذا يعني أن M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$

إذن (p_2) هو المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$ و ينتج مما سبق أن (p_1) منطبق على (p_2) .

تطبيق 2) تعيين نقطة تقاطع مستقيم ومستوي

المستقيم (d) هو تقاطع المستويين (p_1) و (p_2) معادلتاهما على التوالي،

$$2x + z = 0 \text{ و } x - y + z - 3 = 0$$

(p) مستوي معادلته $x + y - z = 0$

بين أن المستقيم (d) يقطع (p) معينا إحداثيات نقطة تقاطعهما.

الحل:

حتى يقطع (d) المستوي (p) يجب أن يكون شعاع توجيه (d) ليس عموديا على الشعاع النازل ل (p)

الشعاع النازل ل (p) هو $\vec{n}(1, 1, -1)$

تعيين شعاع توجيه (d)

$$\begin{cases} x = x \\ y + 3 = -x \\ z = -2x \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x = x \\ y = -x - 3 \\ z = -2x \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

بوضع $A(0, -3, 0)$ و $M(x, y, z)$ نجد $\vec{AM} = x(1, 0, -2)$

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \text{ أي}$$

لإيجاد (x, y, z) نختار قيمة ل z ونبحث عن x و y .

فمثلا نختار $z = -\frac{1}{3}$ وفي هذه الحالة نجد $x = y = \frac{1}{3}$

بأخذ $x = 0$ نجد $y = \frac{1}{3}$ وبالتالي $C(0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

بأخذ $y = 0$ نجد $x = \frac{1}{3}$ ومنه $D(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3})$ إذن $\vec{CD}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$

لتكن (α, β, γ) إحداثيات النقطة A'

$$\vec{AA'} \perp \vec{CD} \quad (1) \dots \alpha - \beta - 1 = 0$$

ولدينا أيضا (2) $\alpha + \beta - 2\gamma - 1 = 0$ (3) $\alpha + \beta + \gamma = 0$

بعد حل جملة المعادلات (1) و (2) و (3) نجد $A'(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

$$AA' = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{49}{9}} = \sqrt{\frac{81}{9}} = 3 \text{ إذن}$$

تطبيق 2) تعيين مجموعة النقط

D, C, B, A أربع نقط ليست من نفس المستوي I و G, J منتصفات القطع

$[AB]$ و $[CD]$ على التوالي.

1- هل يمكن أن تكون I منطبقة على J ؟

ب) هل توجد نقط M من الفضاء بحيث $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC} + \vec{MD}$ ؟

2) عين المجموعة (p_1) للنقط M من الفضاء بحيث $\left\| \vec{MA} + \vec{MB} \right\| = \left\| \vec{MC} + \vec{MD} \right\|$

3) نفرض أن $AB = CD$ نريد تعيين المجموعة (p_2) للنقط M من الفضاء

$$\text{بحيث } MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$$

أ) بين أن $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

ب) حدد المجموعة (p_2) ثم قارن بين (p_1) و (p_2) .

الحل:

أ) من غير الممكن أن تكون I منطبقة على J لأنه لو كان كذلك لكان (AB) يقطع (CD) في I

وهذا يعني أن النقط D, C, B, A تقع في نفس المستوي مما يناقض الفرضية.

ب) لدينا $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ و $\vec{MC} + \vec{MD} = 2\vec{MJ}$

ومنه $\vec{AM} = x\vec{V}$ حيث \vec{V} شعاع توجيه المستقيم (d) المار من A

بما أن $\vec{V} \cdot \vec{n} = 2$ فإن \vec{n} ليس عموديا على \vec{V} وعليه فإن المستقيم (d) يقطع (p) في النقطة H إحداثياتها حل للجملة :

$$\begin{cases} 2x+z=0 & \dots (1) \\ x-y+z-3=0 & \dots (2) \\ x+y-z=0 & \dots (3) \end{cases}$$

بجمع (2) و (3) نجد $2x=3$ ومنه $x=\frac{3}{2}$

بتعويض x في (1) و (2) نجد $z=-3$ و $y=-\frac{9}{2}$

إذن $H(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, -3)$

تطبيق 22

تعيين معادلة سطح كرة ماس لمستوى

(p) مستوي معادلته $4x-3z+3=0$ و A نقطة من (p) فاصلتها 3 وترتيبها 2. عين معادلة سطح الكرة التي قطرها 10 ومماسة لـ (p) عند A.

✓ الحل :

إحداثيات النقطة A هي $(3, 2, 5)$

بما أن A تنتمي إلى (p) فإن $12-3z+3=0$ أي $z=5$

إذن $A(3, 2, 5)$

ليكن $\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ مركز سطح الكرة التي نصف قطرها 10 والمماسة لـ (p) عند A

إذن $\vec{A\omega}$ مرتبط خطيا مع \vec{n}_p وبالتالي $\vec{A\omega} = \lambda \vec{n}_p$ حيث \vec{n}_p ناظم لـ (p)

$$\begin{cases} \alpha-3=4\lambda \\ \beta-2=0 \\ \gamma-5=-3\lambda \end{cases} \text{ ومنه نجد } \begin{cases} \alpha=4\lambda+3 \\ \beta=2 \\ \gamma=-3\lambda+5 \end{cases}$$

بما أن A نقطة من سطح الكرة فإن $\omega A^2=100$

ومنه $100 = (\alpha-3)^2 + (\beta-2)^2 + (\gamma-5)^2 \dots (1)$

بتعويض α و β و γ في (1) نجد $25\lambda^2=100$ ومنه نجد $\lambda=2$ أو $\lambda=-2$

بالتبسيط نجد $\lambda=2$ فإن $\omega(11, 2, -1)$

- إذا كان $\lambda=-2$ فإن $\omega(-5, 2, 11)$

إذن توجد كرتين نصف قطرها 10 ومركزيهما $(11, 2, -1)$ و $(-5, 2, 11)$ مماسة لـ (p) عند A.

تطبيق 23

تعيين المسافة بين نقطة ومستقيم

نعتبر النقط $C(4, 0, 8)$ ، $B(0, 0, 8)$ ، $A(0, 6, 0)$

(1-1) علم هذه النقط في العلم للتعامل و النجاس $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

ثم بين أن (BC) عمودي على المستوي (OAB)

(ب) عين حجم رباعي الوجود (OABC)

(ج) بين أن النقط C, B, A, O تنتمي إلى سطح كرة يطلب تعيينها.

(2) لكل عدد حقيقي k من $[0, 8]$ نرفق النقطة $M(0, 0, k)$

المستوي (π) الذي يشمل M والعمودي على (OB) يقطع المستقيمت

(OC)، (AC)، (AB) على التوالي في Q، P، N

(أ) عين طبيعة الرباعي (MNPQ)

(ب) هل المستقيم (PM) عمودي على (OB) ؟

(ج) من أجل أي قيمة لـ k يكون للمستقيم (PM) عموديا على (AC)

(د) عين MP^2 بدلالة k ومن أجل أي قيمة لـ k تكون المسافة PM تكون أصغرية

✓ الحل :

(1) بما أن (CB) يوازي (OI) و (OI) يعامد المستوي (OAB)

فإن (CB) يعامد (OAB)

(ب) $V = \frac{1}{3} OA \times (OCB \text{ مساحة})$

$$V = \frac{1}{3} OA \times \frac{CB \times OB}{2} = \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{4 \times 8}{2} = 32$$

(ج) بما أن $\vec{OC} \cdot \vec{OA} = 0$ فإن الثلث OAC قائم في O

وبالتالي فإن النقط C, A, O تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها [AC]

بما أن $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$ فإن الثلث ABC قائم في B

وبالتالي النقط C, B, A تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها [AC]

إذن النقط O, C, B, A تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها [AC]

نصف قطر هذه الكرة هو $r = \frac{AC}{2} = \sqrt{29}$ ومركزها $\omega(2, 3, 4)$

(2) بما أن (NM) يوازي (CB) و (PQ) يوازي (CB) والمستقيمان (PQ) و (NM)

ينتميان إلى نفس المستوي فإن :

(NM) يوازي (PQ) وبالتالي الرباعي MNPQ متوازي أضلاع.

(ب) بما أن P و B تنتميان إلى المستوي (π) و (π) عمودي على (OB) فإن (PM) عمودي

على (OB)

(ج) لتكن (x, y, z) إحداثيات النقطة P

مقارن ومساائل



1 - $ABCD$ مربع طول ضلعه 1، ولتكن I و J منتصف $[AB]$ و $[CD]$ -

برهن أن الشعاعين \vec{BI} و \vec{AJ} متعامدان، ثم عين القيمة المقربة للزاوية \widehat{DBI} .

2 - لتكن $A(1,1)$ وليكن (d) مستقيم معادلته $x-2y+3=0$ -

1- عين معادلة المستقيم العمودي على (d) و المار من النقطة A

2- عين إحداثيات النقطة A' السقط العمودي للنقطة A على (d)

3- استنتج المسافة بين النقطة A و (d)

3 - لدينا النقطتان $A(1,2)$ ، $B(3,4)$ و I منتصف $[AB]$ -

في كل حالة من الحالات التالية عين طبيعة مجموعة النقط M التي تحقق الشرط المعطى، ثم حدد المعادلة الديكارتية لكل منها :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 0 \quad ; \quad \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \quad ; \quad (\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot \vec{MA} = 0$$

4 - ليكن (d) مستقيم معادلته $2x+y-4=0$ ، و $A(1,3)$ -

1- تحقق أن A لا تنتمي إلى (d) .

2- عين معادلة النائرة التي مركزها A و الماسة لـ (d)

5 - لتكن (C) دائرة مركزها O ولتكن A ، A' ، B ، B' أربع نقاط من هذه الدائرة بحيث المستقيمين (AA') و (BB') متعامدان، نسمي نقطة تقاطعهما.

$$1- \text{بين أن } \vec{IA} \cdot \vec{IA'} = OA^2 - OA'^2$$

2- بين أن الجور المرسوم من I في المثلث AIB هو ارتفاع في المثلث $IA'B'$

6 - A و B نقطتان من المستوي بحيث $AB=6$ و I منتصف $[AB]$ و k عدد حقيقي.

$$1) \text{بين أن } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = k \text{ تعني أن } MI^2 - IA^2 = k$$

2- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$

$$\begin{cases} x=4\alpha \\ y=-6\alpha+6 \\ z=k-8\alpha \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{pmatrix} x \\ y-6 \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ يكافئ } \vec{AP} = \alpha \vec{AC}$$

$$\text{ومنه } x=\frac{k}{2} \text{ و } y=-\frac{3}{4}k+6 \text{ و } z=k$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{k}{2} \\ \frac{3}{4}k-6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \text{ يكافئ } \vec{PM} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\text{يكافئ } k = \frac{72}{13}$$

$$d) \text{ لدينا } MP^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}k-6\right)^2$$

$$= \frac{k^2}{4} + \frac{9}{16}k^2 + 36 - 9k$$

$$= \frac{13}{16}k^2 - 9k + 36$$

$$\text{إذن } MP = \sqrt{\frac{13}{16}k^2 - 9k + 36}$$

$$\text{نضع } f(k) = \sqrt{\frac{13}{16}k^2 - 9k + 36}$$

$$\text{ومنه } f(k) = \frac{1}{4}\sqrt{13k^2 - 144k + 576}$$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

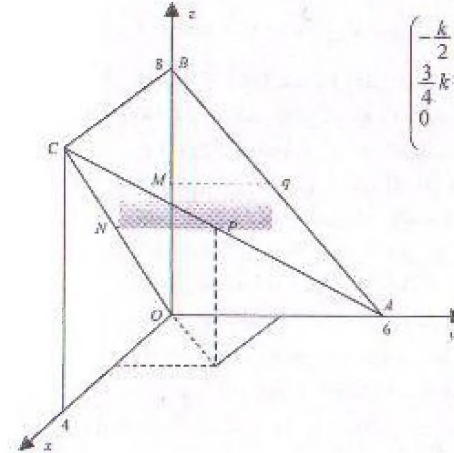
ولدينا

$$f'(k) = \frac{1}{8} \frac{26k - 144}{\sqrt{13k^2 - 144k + 576}}$$

$$k = \frac{144}{26} = \frac{72}{13} \text{ يكافئ } f'(k) = 0$$

القيمة التي من أجلها تكون المسافة

PM أصغرية هي $\frac{72}{13}$



k	0	$\frac{72}{13}$	8
$f'(k)$	-	0	+
تغيرات f'		↘ ↗	
	6		4

7

1- ABC مثلث و M نقطة كيفية من المستوي.

$$\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0$$

بين أن $\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0$ ثم استنتج أن ارتفاعات المثلث ABC متقاطعة في نقطة.

2- ليكن Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ولتكن H نقطة بحيث $\vec{\Omega H} = \vec{\Omega B} + \vec{\Omega C}$ ، وبين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

اكتب \vec{MB} و \vec{MC} بدلالة \vec{MA} وشعاع آخر.

8

لتكن النقط $A(4, 3, -5)$ ، $B(5, -1, 3)$ ، $C(6, -2, -3)$

احسب $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ و \vec{AB} و \vec{AC} ثم استنتج قيمة تقريبية للزاوية $\angle BAC$.

9

1- $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a ، I مركز المربع $EFGH$ و J مركز المربع $BCGF$

(أ) بين أن المستقيمين (AE) و (EF) متعامدان. معينا الطول AI .

(ب) عين الطول AI ، ثم احسب $\vec{AE} \cdot \vec{BJ}$ و $\vec{EI} \cdot \vec{AB}$ و $\vec{EI} \cdot \vec{BJ}$

احسب $\vec{AI} \cdot \vec{AJ}$ بطريقتين مختلفتين واستنتج قيمة مقربة للزاوية $\angle IAJ$

عين قيمة مقربة للزاويتين الأخرتين في المثلث AIJ .

10

لتكن النقط $A(0, 0, 1 + \sqrt{2})$ ، $B(0, 1, 0)$ ، $C(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ ، $C(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

1- بين أن المستقيمين (DA) و (BC) متعامدان.

2- بين أن رباعي الوجوه $ABCD$ منتظم.

11

1- $ABCD$ رباعي وجوه، I و J منتصف $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي،

G مرجح الجملة $(A, 1)$ ، $(B, 1)$ ، $(C, 1)$.

بين أن المستقيمين (LI) و (AB) متعامدان إذا وفقط إذا كان $GA = GB$.

12

1- A, B, C, D أربع نقاط من الفضاء

بين أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان إذا وفقط إذا كان $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

2- ليكن رباعي الوجوه $ABCD$ بحيث المستقيم (AB) يعامد (CD)

والمستقيم (BC) يعامد (AD)

بين أن المستقيم (BD) يعامد (AC) .

13

1- $(\vec{a}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء، إحداثيات النقط A, B, C هي:

$$A(2\sqrt{2}, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 3)$$

أوجد أطوال و زوايا المثلث AOI

14

1- (P) مستوي معادلته $x + 2y - 2z - 1 = 0$ و (q) مستوي معادلته $2x - y + 2z + 1 = 0$

عين مجموعة النقط M متساوية المسافة عن (P) و (q) ثم بين أن هذه المجموعة

هي تقاطع مستويين (π) و (π') يطلب تعيينهما.

2- تحقق أن (π) و (π') متعامدان.

15

1- $A(2, 0, 2)$ ، $B(-1, 1, 0)$ نقطتان من الفضاء.

عين معادلة المستوي المار بالنقطة A وناظمه $\vec{n}(-2, 4, 6)$

2- عين معادلة المستوي العمودي على (AB) والمار من A .

3- عين معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

16

1- نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ حيث I منتصف $[EF]$ و J مركز الوجه $ADHE$

ولنعتبر العلم $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

هل هذه العائلات صحيحة أم خاطئة؟

1- مجموعة النقط $M(x, y, z)$ بحيث $y = -x + 1$ هي المستوي (DBH)

2- المستوي (AIG) هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ بحيث $2x - y - z = 0$

3- المستقيم (BJ) عمودي على المستوي (AIG)

17

1- لتكن النقط $A(2, -2, 3)$ ، $B(1, 1, 1)$ ، $C(3, 1, 0)$

1- تحقق أن هذه النقط تنتمي إلى نفس المستوي.

2- عين معادلة المستوي (ABC) .

18

1- لتكن النقط $A(4, 0, 1)$ ، $B(1, -1, 2)$ ، $C(2, -1, 0)$ ، $D(2, 1, -2)$

1- بين أن المثلث ABC قائم في C ثم عين مساحته.

2- تحقق أن الشعاع $\vec{n}(2, -5, 1)$ تاذلم للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلته.

(ب) عين المسافة بين D والمستوي (ABC) .

3- باستعمال السؤالين (1) و (2) عين حجم رباعي الوجوه $ABCD$

4- عين معادلة المستوي (BCD)

(ب) عين المسافة بين A والمستوي (BCD) .

5- عين عن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ بدلالة مساحة المثلث BCD ، ثم استنتج مساحة BCD .

19 - نسمي ارتفاع رباعي وجوه كل مستقيم يشمل واحد من رؤوسه وعمودي على الوجه المقابل لهذا الرأس.

نقول عن رباعي وجوه أنه متلاقي الأعمدة (أعمدته تتقاطع في نقطة) إذا كانت أعمدته الأربعة متقاطعة. وبصيغة أخرى نقول عن رباعي وجوه $ABCD$ أنه متلاقي الأعمدة إذا وفقط إذا كانت $(AC) \perp (AB)$ و $(AB) \perp (CD)$ و $(AD) \perp (BC)$.

1- لتكن النقط $K(0,0,1)$ ، $J(0,1,0)$ ، $I(1,0,0)$.

هل رباعي الوجوه $(OIKJ)$ متلاقي الأعمدة؟

2- نعتبر رباعي الوجوه $ABCD$ ولتكن H السقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD) . أثبت أنه إذا كان الارتفاعان المرسومان من النقطتين A و B في الرباعي الوجوه $ABCD$ متقاطعين فإن المستقيم (BH) هو ارتفاع في المثلث BCD .

3- نعتبر النقط $D(-2, -5, -1)$ ، $C(3, -3, 3)$ ، $B(-7, 1, 1)$ ، $A(2, 2, -1)$.

أ) تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (BCD) هي $-2x - 3y + 4z - 15 = 0$.

ب) عين إحداثيات النقطة H السقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD) .

ج) احسب الجداء السلمي $\vec{BH} \cdot \vec{CD}$. هل رباعي الوجوه متلاقي الأعمدة؟

(إذا كانت H مسقط A على المستوي (BCD) هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث BCD فإن الرباعي $ABCD$ هو متلاقي أعمدة).

20 - نقط إحداثياتها على التوالي:

$D(4, 3, -3)$ ، $C(2, -1, 1)$ ، $B(5, -2, 3)$ ، $A(3, 4, 3)$.

1- تحقق أن النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

2- عين إحداثيات النقطة D' السقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

21 - رباعي $ABCD$ رباعي وجوه بحيث المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ولتكن I السقط العمودي لـ A على (CD) .

بين أن I السقط العمودي لـ B على (CD) .

22 - نقط إحداثياتها E, D, C, B, A : $C(5, 0, 0)$ ، $B(2, 0, -1)$ ، $A(3, 1, 3)$ ، $D(1, 4, 0)$ ، $E(2, -1, 1)$ على الترتيب.

1- بين أن النقط E, D, C ليست على استقامة واحدة.

2- أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE) .

23 - مستوي (P) معادلته $x - 2y + 2z - 3 = 0$ ، ولتكن A نقطة من (P) فاصلتها 3 وترتيبها 1.

1- عين ارتفاع النقطة A .

2- عين إحداثيات الشعاع الناظم لـ (P) واستنتج شعاعين \vec{n}_1 و \vec{n}_2 ناظمين لـ (P) .

وبحيث طويلتاها 3.

3- Ω_1 نقطة بحيث $\vec{A\Omega_1} = \vec{n_1}$. اشرح لماذا سطح الكرة (S_1) التي مركزها Ω_1

ونصف قطرها 3 مماس لـ (P) عند A .

4- عين معادلة كل سطح كرة نصف قطرها 3 والماسة لـ (P) عند A .

24 - نعتبر النقطتين $A(4, 5, 5)$ ، $B(-2, 2, 2)$ من الفضاء.

1- عين معادلة سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ وهذا بعد حساب نصف قطرها وتعيين مركزها.

2- عين معادلة سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ وهذا باستعمال العلاقة $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

25 - لتكن مجموعة النقط $M(x, y, z)$ المعرفة بـ $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 8 = 0$.

1- تحقق أن $A(0, 0, 4)$ تنتمي إلى (γ) .

ب- بين أن (γ) سطح كرة يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

2- عين معادلة المستوي المماس لـ (γ) في النقطة A .

26 - 1- عين معادلة المستوي (P) الذي شعاعه الناظم $\vec{n}(2, -2, 1)$ ولتكن بالنقطة $A(7, 0, 8)$

2- عين المراجعة التي تعبر عن نقاط نصف الفضاء المفتوح \sum المحدود بالمستوي (P)

ويشمل النقطة $O(0, 0, 0)$.

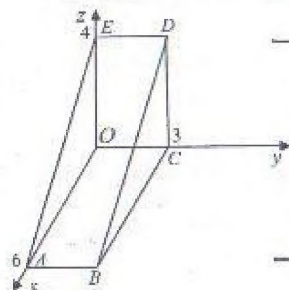
3- عين معادلة سطح الكرة (C) الماسة لـ (P) عند النقطة $B(9, 1, 6)$ بحيث

مركزها I ينتمي إلى \sum ويبعد عن المستوي (P) بمسافة قدرها 6.

27 - رباعي $ABCD$ رباعي وجوه منتظم و M نقطة تقع داخله. بين أن مجموع مسافات

النقطة M عن كل وجه من وجوه الرباعي $ABCD$

تساوي ارتفاع هذا الرباعي.



28 - حدد جملة مراجعات تعبر

عن النقط الموجودة داخل

الموشور $OABCDE$.

29 - $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 ولتكن I و J منتصفي الحرفين $[AB]$ و $[CG]$

على التوالي. إليك الشكل التالي.